Lo spettro di corpo nero

S.C.

25 novembre 2005

1 Il corpo nero

Un corpo nero per definizione é un corpo che assorbe completamente qualunque tipo di radiazione incidente. Esso viene realizzato in laboratorio tramite una cavitá termicamente isolata con un piccolo foro. Infatti una radiazione entrante prima di fuoriuscire dal foro di entrata subirá un notevole numero di riflessioni e assorbimenti, tanto da uscire fortemente attenuata. In altre parole si puó dire che la cavitá assorbe quasi tutta l'energia elettromagnetica entrante.

Ricordiamo che un qualunque corpo che si trovi a temperatura $T \neq 0$ é sorgente di radiazione elettromagnetica dovuta al moto di agitazione termica degli atomi che lo compongono. L'emissione di energia e.m. avviene a spese dell'energia termica.

Dunque all'interno della cavitá sará sempre presente una radiazione termica, e nel caso in cui la temperatura rimanga costante (condizioni di equilibrio termodinamico) la distribuzione di radiazione viene detta *spettro di corpo nero*.

2 Calcolo dello spettro di corpo nero

Consideriamo una cavitá al cui interno é presente un mezzo di indice di rifrazione η. Inoltre supponiamo che il mezzo sia omogeneo e isotropo per cui η é invariante per rotazioni e traslazioni. Inoltre supponiamo che il dielettrico non sia ferromagnetico per cui $\mu_r \simeq 1$ e $\eta^2 \simeq \epsilon_r$.

All'interno della cavitá é possibile definire una densitá di energia elettromagnetica ottenibile a partire dalle equazioni di Maxwell:

$$\rho(E, B) = \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon_r E^2 + \frac{c^2 B^2}{\mu_r}) \tag{1}$$

per cui l'energia e.m. totale é

$$W = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

A noi interessa calcolare la distribuzione spettrale di energia, ovvero la ρ_ω per cui $\mathrm{d}\rho_\omega = \rho_\omega \mathrm{d}\omega$ rappresenta la densitá di energia e.m. presente con frequenza compresa tra ω e $\omega + \mathrm{d}\omega$

Attraverso un breve ragionamento é possibile vedere come la ρ_ω possa dipendere esclusivamente dalla frequenza e temperatura e non dalla forma e materiale di cui é costituita la cavitá.
Consideriamo infatti due cavitá di forma e materiale differente che si trovino alla stessa temperatura T. In entrambe le cavitá ci sará una certa distribuzione di energia elettromagnetica descritta dalle funzioni ρ_ω^1 e ρ_ω^2. Supponiamo che per una generica frequenza ω valga $\rho_\omega^1 > \rho_\omega^2$, allora se uniamo le due cavitá attraverso un collegamento ottico con un filtro che permetta il trasferimento di energia alla frequenza ω ci sará un flusso di energia dalla cavitá 1 alla cavitá 2. Questo peró va contro il secondo principio della termodinamica perché le due cavitá si trovano alla stessa temperatura, dunque concludiamo che dev'essere $\rho_\omega^1 = \rho_\omega^2$, e $\rho_\omega = \rho_\omega(\omega, T)$.

Per quanto detto possiamo non complicarci la vita e considerare una cavitá che abbia una geometria semplice, ad esempio un bel parallelepipedo a base quadrata di spigoli $2a$, $2a$, d.
Supponiamo che le pareti siano perfettamente conduttrici, allora é possibile immagazzinare e conservare energia e.m. all'interno della cavitá senza perdite purché le frequenze corrispondano alle frequenze di risonanza della cavitá.
Le frequenze di risonanza della cavitá sono quelle per cui si instaurano delle onde stazionarie, quindi nelle tre direzioni devono essere comprese un numero intero di semilunghezze d'onda. Vediamo per un lato:
$l\frac{\lambda}{2} = 2a \Longrightarrow \lambda = \frac{4a}{l}$
con l numero intero. Siccome $\omega = 2\pi\frac{v}{\lambda}$ si ottiene per la pulsazione
$\omega = v\frac{l\pi}{2a}$
Considerando il caso tridimensionale, quello che si ottiene é che le frequenze di risonanza della cavitá considerata sono date da:

$$\omega = \frac{c}{\eta}\Big[(\frac{l\pi}{2a})^2 + (\frac{m\pi}{2a})^2 + (\frac{n\pi}{d})^2\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

con l, m, n numeri interi.
Notando che $\omega = kv$ dove k é il famoso vettore d'onda, possiamo risrivere la 2 come

$$\omega = \frac{c}{\eta}\Big[(k_x)^2 + (k_y)^2 + (k_z)^2\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Si noti poi che per ogni terna (l, m, n) esistono due *modi* distinti: il *trasversale elettrico* e *trasversale magnetico.*
Per *modo* si intende una particolare configurazione dei campi elettrico e magnetico che soddisfi la condizione di risonanza. Il modo *trasversale elettrico* é tale per cui in ogni punto della cavitá il campo elettrico é diretto nella direzione perpendicolare a $\hat{z}$; il modo *trasversale magnetico* é tale per cui é il campo magnetico ad avere direzione perpendicolare a $\hat{z}$ per ogni punto.

Vogliamo ora calcolare qual é il numero di modi compresi tra 0 ed una generica frequenza ω, cioé tali da avere un vettore d'onda compreso in modulo tra 0 e $\frac{\omega\eta}{c}$.
Dunque ci mettiamo nello spazio delle fasi. Tutti i punti individuati da (k_x, k_y, k_z) che rispettano la condizione di risonanza formano un reticolo la cui

cella unitaria ha dimensioni $(\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{d})$. La condizione

$$0 \leq k \leq \frac{\omega\eta}{c} \tag{4}$$

individua una sfera nello spazio delle fasi.
Ogni celletta ha contigui 8 modi (i vertici) e allo stesso tempo ogni vertice é condiviso da 8 cellette, concludiamo che si ha 1 modo pero ogni cella (in realtá due perché per ogni terna (k_x, k_y, k_z) c'é un modo trasversale elettrico e trasversale magnetico come visto piu' sopra).
E' facile adesso calcolare il numero di modi compresi all'interno della sfera, tenendo conto che siamo interessati ad un solo ottante perché l, m, n sono numeri naturali e come tali positivi:

$$N_\omega = \frac{\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi(\frac{\omega\eta}{c})^3}{\frac{\pi}{2a}\frac{\pi}{2a}\frac{\pi}{d}} * 2 \tag{5}$$

cioé

$$N_\omega = \frac{1}{3}\frac{\omega^3\eta^3}{c^3\pi^2}V$$

dove V 'e il volume della celletta nello spazio delle fasi.

Per arrivare alla ρ_ω ci interessa valutare il numero di modi per unitá di volume e di frequenza, quindi ci interessa

$$p_\omega = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\omega^2\eta^3}{c^3\pi^2} \tag{6}$$

A questo punto é semplice passare alla densita spettrale di energia, infatti é sufficiente moltiplicare la 6 per il valor medio dell'energia dei modi alla frequenza ω. Proprio in questo passaggio arrivano i dolori per la fisica classica, che non riesce a spiegare l'andamento della distribuzione spettrale della radiazione emessa da un corpo nero.

Classicamente la distribuzione di energia e.m. presente nella cavitá, e dovuta al moto di agitazione termica dei vari atomi delle pareti, deve essere la stessa di questa miriade di oscillatori armonici classici che si trovano ad una temperatura T.
Prendiamo in considerazione una frequenza ω, la meccanica statistica ci dice che la probabilitá che uno di questi oscillatori alla frequenza ω e temperatura T abbia energia compresa tra E ed $E + \mathrm{d}E$ é data dalla legge di Boltzmann:

$$\mathrm{d}P(E) = Ce^{-\frac{E}{kT}}\mathrm{d}E \tag{7}$$

Quindi il valor medio dell'energia vale

$$< E >= \frac{\int_0^\infty ECe^{-\frac{E}{kT}}\mathrm{d}E}{\int_0^\infty Ce^{-\frac{E}{kT}}} \tag{8}$$

Poniamo $\beta = \frac{1}{kT}$.
Si nota facilmente che

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\ln\int_0^\infty e^{-\beta E}\mathrm{d}E = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\beta E}\mathrm{d}E} * \int_0^\infty Ee^{-\beta E}\mathrm{d}E =< E >$$

Quindi

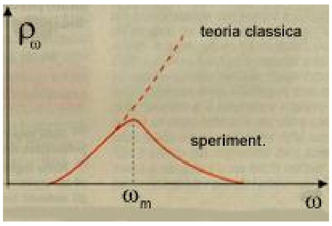
$$< E >= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\ln\Big[-\frac{1}{\beta}e^{-\beta E}\Big]_0^\infty = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\ln(\frac{1}{\beta}) = \frac{1}{\beta} = kT$$

Per cui secondo la fisica classica

$$\rho_\omega = p_\omega < E >= \frac{\omega^2\eta^3}{c^3\pi^2}kT \tag{9}$$

La 9 é la formula classica di *Rayleigh - Jeans* e non riproduce affatto i dati sperimentali! Infatti la densita' spettrale di energia tende ad infinito per ω tendente ad infinito e quindi per λ tendente a zero. Questo é il cosí detto fenomeno della *catastrofe ultravioletta*, visibile in figura 1. Inoltre si vede che integrando la 9 su tutte le frequenze possibili si ottiene una densitá di energia infinita!

Figura 1: Spettro del corpo nero e previsione classica



Ed é proprio qui che entra in gioco Plank. Egli supera i problemi della fisica classica supponendo che la radiazione e.m. sia quantizzata, cioé egli discretizza l'energia dei modi considerandola multipla di una quantitá legata alla frequenza del modo stesso:
$E_n = nh\nu$
Allo stesso tempo egli introduce una nuova distribuzione di probabilita' chiamata *distribuzione di Plank* per cui la probabilitá che il modo in questione possegga una energia E_n vale:

$$P(E_n) = Ce^{\frac{-n\hbar\omega}{kT}}$$

inoltre siccome l'energia e' discretizzata gli integrali sono sostituiti da sommatorie e il valor medio dell'energia vale

$$< E >= \frac{\sum_{n=0}^\infty n\hbar\omega e^{\frac{-n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^\infty e^{\frac{-n\hbar\omega}{kT}}}$$

anche in questo caso si ha che

$$< E >= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \ln \big[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\hbar\omega\beta} \big]$$

la sommatoria che compare nella precedente é una serie geometrica di ragione $e^{-\hbar\omega\beta}$per cui

$$< E >= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} \ln \big[\frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega\beta}} \big] = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega\beta} - 1}$$

e finalmente riusciamo ad ottenere l'espressione della densitá spettrale di radiazione del corpo nero:

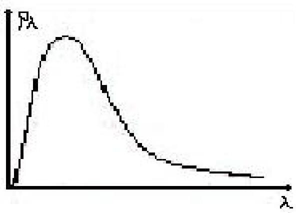
$$\rho_\omega = \frac{\hbar\eta^3\omega^3}{\pi^2 c^3 [e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1]} \tag{10}$$

la 10 riproduce bene i dati sperimentali se $h = 2\pi\hbar = 6.32 \cdot 10^{-34}\, Js$. Inoltre il numero medio di fotoni per modo é dato da[1]

$$\bar{q} = \frac{< E >}{h\nu} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

e per frequenze nel campo ottico ($\nu \simeq 10^{14} Hz$) alla temperatura $T = 300\, K$ vale $\bar{q} \simeq e^{-40} \simeq 10^{-18}$.
Si capisce quindi che a temperatura ambiente l'emissione nella banda del visibile é ridicola. In figura 2 é riportato l'andamento spettrale in funzione della lunghezza d'onda.

Figura 2: Spettro in lunghezza d'onda



3 Legge di Wien

La legge di Wien viene fuori andando a considerare per quale lunghezza d'onda si ha un massimo di emissione. Per fare questo bisogna prima passare all'espressione della distribuzione spettrale in funzione di λ:

$$\rho_\omega \mathrm{d}\omega = \rho_\omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda} \mathrm{d}\lambda = \rho_\lambda \mathrm{d}\lambda$$

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$$

[1]un fotone di frequenza ν trasporta un'energia $h\nu$

$$\mathrm{d}\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$$

per cui

$$\rho_\omega \mathrm{d}\omega = \frac{\eta^3 \frac{(2\pi c)^3}{\lambda^3}\hbar}{\pi^2 c^3 \left[e^{\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}} - 1\right]} \Big(\frac{-2\pi c}{\lambda^2}\Big)\mathrm{d}\lambda$$

e infine

$$\rho_\lambda \mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi h c \eta^3}{\lambda^5 \left[e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1\right]}\mathrm{d}\lambda \tag{11}$$

Per semplificare i calcoli poniamo
$x = \frac{hc}{\lambda kT}$ e troviamo il massimo della funzione spettrale derivando rispetto ad x:

$$\frac{\mathrm{d}\rho_\lambda}{\mathrm{d}x} = 0 \Longrightarrow e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$$

La precedente é un'equazione trascendente la cui soluzione é $x = x_0 = 4.9651$, quindi

$$\frac{hc}{\lambda_{max} kT} = x_0 = cost$$

e infine

$$\lambda_{max} T = b \tag{12}$$

con b costante, $b = 2.8978 \cdot 10^{-3} mK$

La 12 esprime la legge di Wien per cui all'aumentare della temperatura il massimo di emissione si sposta verso lunghezze d'onda minori e quindi energie maggiori. Se ne deduce che al variare della temperatura del corpo varia il colore!
Introduciamo quindi il concetto di *temperatura di colore*, quale la temperatura cui corrisponde un ben determinato massimo di emissione. Questo é per esempio il metodo utilizzato per capire quale sia la temperatura di forni particolarmente potenti per i quali é chiaramente impossibile pensare all'utilizzo di un termometro.

4 Legge di Stefan - Boltzmann

La legge di Stefan - Boltzmann riguarda l'intensitá di radiazione emessa, quindi iniziamo col calcolarci l'espressione della densitá di energia integrando la 10 su tutta la banda di frequenze:

$$\rho = \int_0^\infty \frac{\hbar \eta^3 \omega^3}{\pi^2 c^3 [e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1]}\mathrm{d}\omega$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$\rho = \frac{\eta^3 (kT)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\mathrm{d}x$$

L'integrale che compare nella precedente é noto e vale 6.4938. Quindi

$$\rho = 7.5643\Big(\frac{JK^{-4}}{m^3}\Big)\eta^3 T^4$$

La densitá di energia é chiaramente una energia per unitá di volume.
L'intensitá é una energia per unitá di superficie e di tempo, quindi in pratica una densitá per una velocitá. Segue che la dipendenza da T non cambia e si puó scrivere

$$F(T) = \sigma T^4 \tag{13}$$

la 13 esprime la legge di Stefan - Boltzmann cercata. F é detta *emittanza di radiazione*, e σ é la costante di Stefan - Boltzmann che vale
$\sigma = 5.6693 \cdot 10^{-8}\, W m^{-2} K^{-4}$
Si noti che l'intensitá di emissione va con la quarta potenza della temperatura.