

Descrizione del funzionamento di un Lock-in Amplifier

S.C.

20 luglio 2004

1 Propositi di un amplificatore Lock-in

Il *Lock-in Amplifier* é uno strumento che permette di misurare l'ampiezza V_0 di una tensione sinusoidale

$$v_{in}(t) = V_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

La sua particolarità sta nel fatto che é in grado di compiere la misura anche in presenza di un forte rumore esterno (purché il rumore abbia una frequenza diversa da ω). Per fare questo il Lock-in necessita di un segnale di riferimento sincronizzato al segnale che si intende misurare e di ampiezza nota, ad esempio di 1 V picco a picco.

Si vedrá come in pratica il segnale di riferimento permette di selezionare all'interno del segnale ricevuto affetto da rumore $n(t)$

$$v_{in}(t) = V_0 \cos(\omega t) + n(t) \quad (2)$$

la sola ampiezza di interesse, quella che corrisponde proprio alla frequenza ω del segnale di riferimento.

2 Composizione di un Lock-in

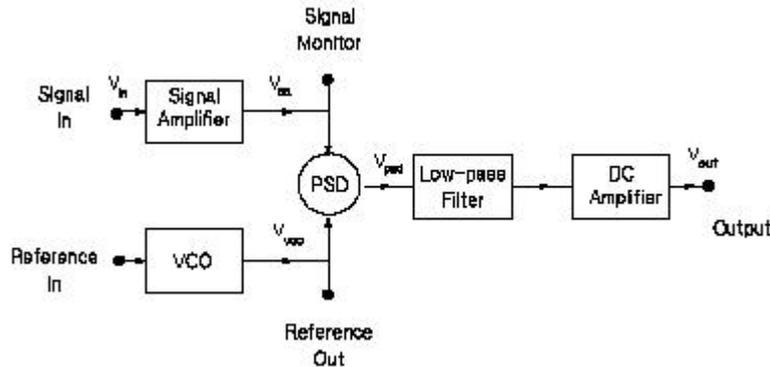
Un amplificatore Lock-in é costituito da 5 parti: un *amplificatore in alternata*, un *oscillatore controllato di tensione* (VCO), un *moltiplicatore* (PSD), un *filtro passa basso* ed un *amplificatore in continua*.

Il segnale in ingresso (2) viene mandato all'ingresso dell'amplificatore AC e in uscita dall'amplificatore DC si riceve l'ampiezza cercata V_0 . Lo schema a blocchi é mostrato in figura 1.

Passiamo in rassegna le varie parti costituenti:

AC amplifier : si tratta di un semplice amplificatore di tensione combinato con dei filtri a scelta. La sua funzione é quella di amplificare il segnale di ingresso, accentuando in particolare la componente di frequenza desiderata (con un'opportuna scelta dei filtri).

Figura 1: Schema a blocchi di un Lock-in Amplifier



Voltage Controlled Oscillator : si tratta semplicemente di un oscillatore di tensione che è in grado di sincronizzarsi con un segnale di riferimento esterno sia in fase che in frequenza. Alcuni amplificatori Lock-in dispongono di un oscillatore più completo in grado di generare autonomamente il segnale di riferimento in base ai settaggi impostati dall'utente. Infine i VCO dispongono di un circuito che permette di sfasare il segnale di riferimento da 0 a 360 gradi.

Phase Sensitive Detector (multiplier) : si tratta di un circuito che presi in ingresso due segnali V_{in_1} e V_{in_2} li moltiplica e fornisce in uscita il prodotto dei due $V_{out} = V_{in_1} \cdot V_{in_2}$; per questo motivo è chiamato moltiplicatore.

Low pass filter : si tratta di un normale filtro passa basso (RC) per il quale è possibile impostare la frequenza di taglio modificando i valori di capacità o resistenza.

DC amplifier : Si tratta semplicemente di un amplificatore in continua.

3 Descrizione del Lock-in nel dominio dei tempi

Supponiamo di voler misurare l'ampiezza di un segnale di tipo (1) a partire dal segnale reale affetto da rumore di cui effettivamente si dispone (2). Per farlo mandiamo il segnale (2) all'ingresso dell'amplificatore AC. Ovviamente non abbiamo interesse ad amplificare le componenti del segnale che hanno una frequenza diversa da ω , per questo vi è la possibilità di inserire dei filtri in frequenza nell'amplificatore.

Se G_{ac} è il guadagno dell'amplificatore per segnali di frequenza ω e $G(f)$ è il guadagno per le altre frequenze (dalle quali dipende), all'uscita dell'AC

amplifier otterremo

$$v_{AC}(t) = G_{ac} V_0 \cos(\omega t) + G(f) n(t) \quad (3)$$

La tensione (3) finisce poi all'ingresso del moltiplicatore, il quale fornisce in uscita (5) il prodotto del segnale in ingresso per il segnale di riferimento (4):

$$R(t) = 1 \cos(\omega t + \phi) \quad (4)$$

(dove ϕ é lo sfasamento rispetto al segnale (1) dovuto ai ritardi dell'elettronica)

$$v_{PSD}(t) = v_{AC}(t) \cdot R(t) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} v_{PSD}(t) &= [(G_{ac} V_0 \cos(\omega t) + G(f) n(t)] \cos(\omega t + \phi) = \\ &G_{ac} V_0 \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \phi) + G(f) n(t) \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

utilizzando la formula trigonometrica

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = (1/2)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (6)$$

si ottiene:

$$v_{PSD}(t) = \frac{G_{ac} V_0}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] + G(f) n(t) \cos(\omega t + \phi)$$

cioé

$$v_{PSD}(t) = \frac{G_{ac} V_0}{2} \cos \phi + G(f) n(t) \cos(\omega t + \phi) + \frac{G_{ac} V_0}{2} \cos(2\omega t + \phi) \quad (7)$$

Occupiamoci del secondo termine della (7). In particolare si può utilizzare la trasformata di Fourier e porre

$$n(t) = \text{Re} \left[C \int d\omega' \eta(\omega') e^{i\omega' t} \right] = C \int d\omega' \eta(\omega') \cos \omega' t \simeq \sum_{\omega'} \eta(\omega') \cos \omega' t$$

Inserendo la precedente nella (7) e tirando fuori dalla sommatoria la componente di frequenza $\omega' = \omega$ si ottiene (applicando nuovamente la (6)):

$$\begin{aligned} v_{PSD}(t) &= \frac{G_{ac} V_0}{2} \cos \phi + \frac{G_{ac} V_0}{2} \cos(2\omega t + \phi) + \frac{G_{ac} \eta(\omega)}{2} [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] + \\ &+ \sum_{\omega' \neq \omega} \frac{G(\omega'/(2\pi)) \eta(\omega')}{2} [\cos[(\omega' + \omega)t] + \cos[(\omega' - \omega)t]] \end{aligned} \quad (8)$$

Dunque la (8) rappresenta ciò che esce dal moltiplicatore. Si vede chiaramente che solo alcuni termini sono costanti e non dipendono dal tempo mentre gli altri sono tutti dipendenti dal tempo e periodici con pulsazioni 2ω (il termine più significativo) e $(\omega' + \omega)$ e $(\omega' - \omega)$ (i contributi dovuti al rumore di fondo). Se si riuscisse ad isolare la sola componente costante (a frequenza nulla), si avrebbe:

$$v_{PSD}(t) = V_{PSD} = \frac{G_{ac} V_0}{2} \cos \phi + \frac{G_{ac} \eta(\omega)}{2} \cos \phi \quad (9)$$

Il secondo termine della (9) può a questo punto essere trascurato. Infatti basta scegliere una frequenza ω del segnale da rivelare che sia diversa dalle frequenze

tipiche delle sorgenti di rumore e loro armoniche (ad esempio i 50 Hz della rete elettrica). In questo modo assumendo poi di avere a che fare in generale con un rumore bianco¹, escludendo i picchi dovuti alla presenza di determinate sorgenti di rumore, l'intensità del disturbo per le singole frequenze é piccola e cosí $\eta(\omega)$ é trascurabile se ω é diversa dalle frequenze cui corrispondono picchi di rumore.

Allora isolando la sola componente continua il risultato sarebbe con buona approssimazione

$$v_{PSD}(t) = V_{PSD} = \frac{G_{ac} V_0}{2} \cos \phi \quad (10)$$

Per selezionare solamente i segnali costanti nel tempo si utilizza un filtro passa basso che riceve in ingresso il segnale in uscita dal moltiplicatore.

Per arrivare a conoscere ciò che si vuole misurare (V_0) a partire dalla (10) bisogna ancora disfarsi della fase ϕ che a priori non é nota. Per questo motivo il VCD é in grado di sfasare il segnale di riferimento. Infatti in un secondo passo vengono mandati all'ingresso del moltiplicatore i segnali $v_{AC}(t)$ e il segnale di riferimento sfasato di 90 gradi $R'(t) = \sin(\omega t + \phi)$. Con calcoli analoghi ai precedenti² si arriva ad ottenere:

$$\begin{aligned} v'_{PSD}(t) = & \frac{G_{ac} V_0}{2} \sin \phi + \frac{G_{ac} V_0}{2} \sin(2\omega t + \phi) + \frac{G_{ac} \eta(\omega)}{2} [-\sin \phi + \sin(2\omega t + \phi)] + \\ & + \sum_{\omega' \neq \omega} \frac{G(\omega'/(2\pi))\eta(\omega')}{2} [\sin[(\omega' + \omega)t] + \sin[(\omega - \omega')t]] \end{aligned} \quad (11)$$

E analogamente a quanto fatto prima, considerando la componente costante nel tempo e trascurando l'ampiezza del rumore alla singola frequenza ω :

$$v'_{PSD}(t) = V'_{PSD} = -\frac{G_{ac} V_0}{2} \sin \phi \quad (12)$$

Dunque si dispone di due segnali di output che vengono poi amplificati per mezzo dell'amplificatore DC in modo da avere:

$$V_{out1} = \frac{G_{dc} G_{ac} V_0}{2} \cos \phi \quad (13)$$

$$V_{out2} = -\frac{G_{dc} G_{ac} V_0}{2} \sin \phi \quad (14)$$

A questo punto é sufficiente un passaggio a coordinate polari

$$V_\rho = \sqrt{V_{out1}^2 + V_{out2}^2} = \frac{G_{dc} G_{ac} V_0}{2} \quad (15)$$

$$V_\phi = \arctan \frac{V_{out2}}{V_{out1}} = \phi \quad (16)$$

¹un rumore si dice bianco quando la sua intensità é costante al variare della frequenza

²utilizzando l'identità $\cos \alpha \sin \beta = (1/2)(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha))$

Chiaramente dalla (15) si risale facilmente all'ampiezza V_0 desiderata essendo noti i guadagni degli amplificatori utilizzati. Inoltre la (16) rappresenta proprio la fase ϕ e fornisce indicazioni sul ritardo elettronico.

4 Descrizione del Lock-in nel dominio delle frequenze

Vediamo passo per passo come si modifica lo spettro in frequenza del segnale ai vari stadi del Lock-in amplifier. Supponiamo ad esempio di voler misurare l'ampiezza di un segnale di frequenza $f_0 = 200 \text{ Hz}$ sincronizzato al segnale di riferimento del Lock-in. Riferendoci a quanto detto in precedenza, a partire da un segnale di tipo (2) vogliamo misurare l'ampiezza V_0 con $\omega = 2\pi f_0$.

Lo spettro in frequenza di un segnale é ottenuto graficando la densità spettrale di potenza in funzione della frequenza. In altre parole, dato un segnale $v(t)$, per ottenere lo spettro occorre farne la trasformata di Fourier per passare al dominio delle frequenze e quindi il modulo quadro per ottenere una potenza:

$$S_v(f) = T.F. \left[|v(t)|^2 \right]$$

In figura 2 é mostrato lo spettro in frequenza di un possibile segnale in ingresso al Lock-in amplifier. Esso contiene la componente alla frequenza $f_0 = 200 \text{ Hz}$ che intendiamo misurare, ma allo stesso tempo é affetto da rumore. In particolare si nota un rumore pressapoco bianco di fondo, con dei picchi molto alti per $f_1 = 60 \text{ Hz}$ e relative armoniche. Il rumore avente frequenza f_1 é dovuto alla presenza nell'ambiente in cui si effettua la misura, di una sorgente di noise proprio alla frequenza f_1 (analogamente a quanto si era detto al riguardo della rete elettrica).

Il segnale passa per l'amplificatore AC e con la scelta di un opportuno filtro, in uscita si ottiene un segnale in cui vengono amplificate le componenti centrate attorno ad f_0 mentre vengono attenuate le altre. La situazione é mostrata in figura 3, si nota come il segnale desiderato sia stato amplificato rispetto alle linee di rumore alla frequenza f_1 e armoniche, eccetto la terza che si trova ad una frequenza di 180 Hz , vicina ad f_0 .

A questo punto il segnale passa attraverso il multiplier, e quindi viene moltiplicato per il segnale di riferimento avente frequenza f_0 . La moltiplicazione dei due segnali porta ad un raddoppio del numero dei picchi. Infatti ogni picco corrispondente ad una certa frequenza f_p da origine a due picchi shiftati alle frequenze $f_0 + f_p$ e $f_0 - f_p$ come si é visto in precedenza (vedi la (8)). Per quanto detto all'uscita del multiplier (vedi figura 4) il segnale desiderato é contenuto sia nel picco a $f = 0 \text{ Hz}$ che nel picco a $f = 400 \text{ Hz}$. Analogamente la terza componente armonica della fondamentale $f = 60 \text{ Hz}$ si trova ora a 20 e 380 Hz .

Figura 2: Densità spettrale di potenza del segnale in ingresso al Lock-in

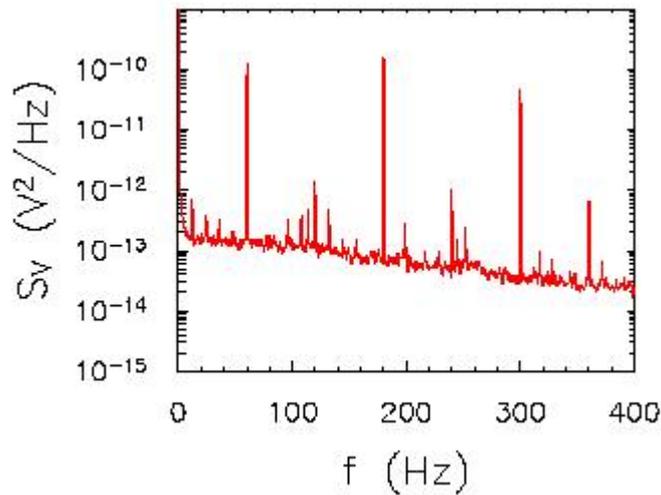
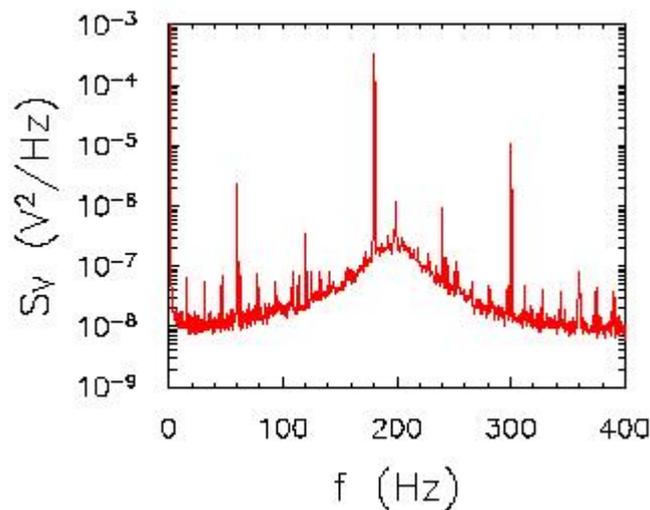
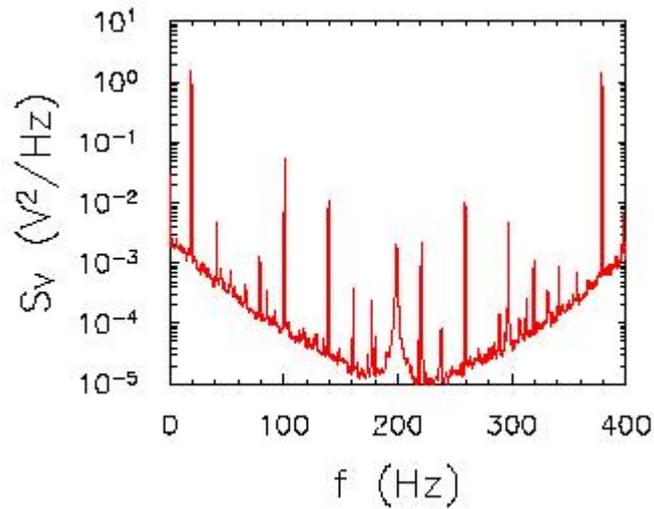


Figura 3: Densità spettrale di potenza del segnale in uscita dall'AC amplifier



A questo punto per isolare la sola componente continua e quindi il picco alla frequenza $f = 0 Hz$ si manda il segnale in un filtro passa basso. La frequenza di taglio del filtro $f_t = 1/RC$ viene impostata variando la capacità o la resistenza in modo da tagliare tutti i disturbi presenti. Nell'esempio seguito una buona frequenza di taglio potrebbe essere $f_t = 1/100 Hz = 0.01 Hz$. In questo modo tutti i segnali con frequenza maggiore di f_t vengono notevolmente attenuati ed il solo segnale importante rimane quello desiderato (vedi figura 5).

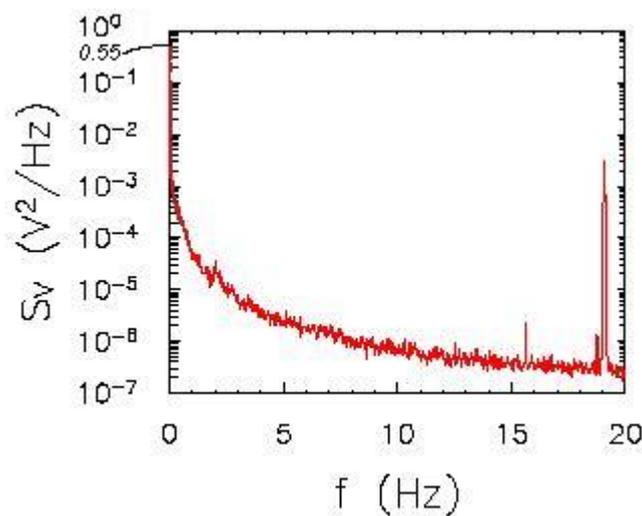
Figura 4: Densità spettrale di potenza del segnale in uscita dal PSD



In poche parole tutta questa sequenza di operazioni ha permesso di trasferire e amplificare l'informazione contenuta nel range di frequenza 199 – 201 Hz del segnale in ingresso al range 0 – 1 Hz del segnale in uscita.

Infine il segnale viene mandato in un amplificatore DC che amplifica ulteriormente la componente continua. L'output del Lock-in é mostrato in figura 5.

Figura 5: Densità spettrale di potenza del segnale in uscita dal Lock-in



5 Complicazioni

Per la maggior parte degli amplificatori Lock-in, il multiplier non moltiplica il segnale in ingresso per una sinusoide sincronizzata, ma piuttosto per un'onda quadra sincronizzata. Il motivo é di ragioni pratiche. Piuttosto che costruire un multiplier per il quale ci sono problemi di stabilit , é pi  semplice costruire degli switch con dei transistor in modo da fare passare oppure no ad intervalli regolari un segnale in ingresso. In questo caso si otterrebbe in uscita proprio il prodotto dell'ingresso per un'onda quadra.

Siccome un'onda quadra é rappresentabile attraverso una serie di Fourier³ il cui termine dominante é l'armonica fondamentale (che ha la stessa frequenza del segnale periodico sviluppato in serie), questa complicazione non altera di molto i risultati ottenuti.

6 Bibliografia

A Frequency-Domain Description of a Lockin Amplifier, di John H. Scofield.
American Journal of Physics, feb 1994.

³un'onda quadra di ampiezza E_0 e frequenza f_0 pu  essere espressa come

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4E_0}{(2n+1)} \sin [(2n+1)2\pi f_0 t + \phi_n]$$